

PURPLE COMET! MATH MEET duben 2019

ÚLOHY - STŘEDNÍ ŠKOLY

Copyright ©Titu Andreescu and Jonathan Kane

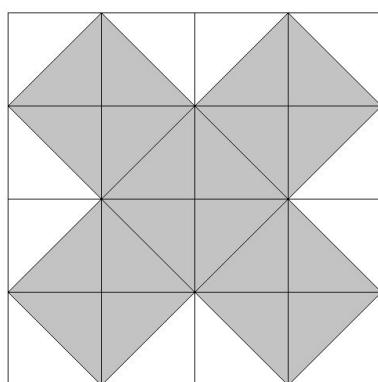
přeložila Michaela Hlásek

Úloha 1

Ivan, Stefan a Katia si rozdělili 150 bonbonů tak, že Stefan a Katia dostali každý dvakrát více bonbonů než Ivan. Určete počet bonbonů, které obdržel Ivan.

Úloha 2

Velký čtverec na obrázku níže o straně délky 8 je rozdělen na 16 shodných čtverců. Určete obsah vybarveného útvaru.

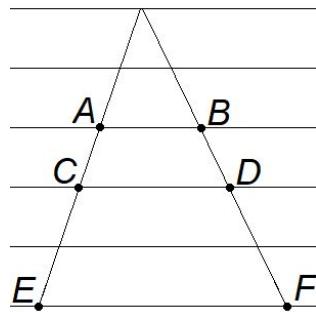


Úloha 3

Aritmetický průměr čísel $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ a $\frac{5}{6}$ se liší od aritmetického průměru čísel $\frac{7}{8}$ a $\frac{9}{10}$ o $\frac{m}{n}$, kde m a n jsou navzájem nesoudělná přirozená čísla. Určete $m + n$.

Úloha 4

Na obrázku níže jsou shodně vzdálené rovnoběžné přímky a trojúhelník, jehož vrcholy leží na těchto přímkách. Úsečka CD je o šest jednotek delší než úsečka AB . Určete délku úsečky EF .



Úloha 5

Spočtěte hodnotu

$$\frac{(2+2)^2}{2^2} \cdot \frac{(3+3+3+3)^3}{(3+3+3)^3} \cdot \frac{(6+6+6+6+6+6)^6}{(6+6+6+6)^6}.$$

Úloha 6

Pětiúhelník má čtyři vnitřní úhly o velikosti 110° . Určete velikost pátého vnitřního úhlu ve stupních.

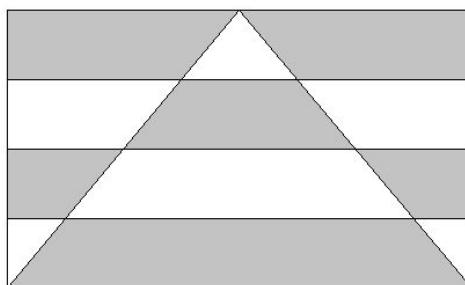
Úloha 7

Určete počet reálných čísel x , která splňují rovnici

$$(3^x)^{x+2} + (4^x)^{x+2} - (6^x)^{x+2} = 1.$$

Úloha 8

Na obrázku níže je obdélník o rozměrech 12 krát 20 rozdělen na čtyři pruhy stejné šířky obklopující rovnoramenný trojúhelník. Určete obsah vybarvené oblasti.



Úloha 9

Určete počet přirozených čísel n takových, že součin reálných řešení následující rovnice je roven 32.

$$x^{\log_2(x^3)-n} = 13$$

Úloha 10

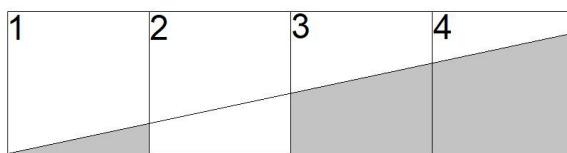
Určete počet přirozených čísel menších než 2019, která nejsou násobky 3 ani žádná z jejich cifer není násobkem 3.

Úloha 11

Nechť $m > n$ jsou přirozená čísla splňující $3(3mn - 2)^2 - 2(3m - 3n)^2 = 2019$. Určete $3m + n$.

Úloha 12

Na následujícím obrázku jsou čtyři sousedící čtverce o rozměrech 2×2 označené 1, 2, 3 a 4. Přímka procházející levým dolním rohem čtverce 1 rozděluje celkový obsah čtverců 1, 3 a 4 na poloviny, tedy obsah vybarvené oblasti je 6. Rozdíl mezi obsahy vybarvené části čtverce 4 a vybarvené části čtverce 1 je $\frac{p}{q}$, kde p a q jsou navzájem nesoudělná přirozená čísla. Určete $p + q$.

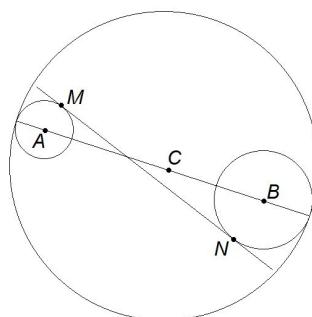


Úloha 13

Nechť m a n jsou navzájem nesoudělná přirozená čísla taková, že parabola daná rovnicí $y = 4x^2$ se dotýká paraboly s rovinicí $x = y^2 + \frac{m}{n}$ v jediném bodě. Určete $m + n$.

Úloha 14

Kružnice se středem v bodě A o poloměru 19 a kružnice se středem v bodě B o poloměru 32 mají vnitřní dotyk s kružnicí se středem v bodě C o poloměru 100 tak, že bod C leží na úsečce AB . Bod M leží na kružnici se středem A a bod N leží na kružnici se středem v bodě B tak, že přímka MN je společnou vnitřní tečnou těchto dvou kružnic. Určete vzdálenost MN .



Úloha 15

Budě a reálné číslo takové, že $\sin(\pi \cdot \cos a) = \cos(\pi \cdot \sin a)$. Vypočtěte $35 \sin^2(2a) + 84 \cos^2(4a)$.

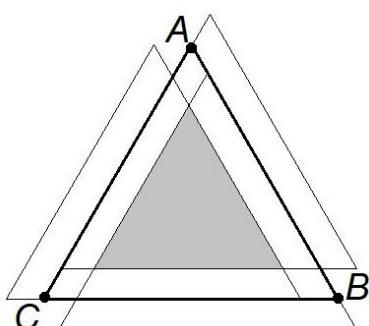
Úloha 16

Určete počet uspořádaných trojic (T_1, T_2, T_3) takových, že

1. každá z množin T_1 , T_2 a T_3 je podmnožinou množiny $\{1, 2, 3, 4\}$,
2. $T_1 \subseteq T_2 \cup T_3$,
3. $T_2 \subseteq T_1 \cup T_3$,
4. $T_3 \subseteq T_1 \cup T_2$.

Úloha 17

Na obrázku níže je rovnostranný trojúhelník $\triangle ABC$ a tři další trojúhelníky shodné s $\triangle ABC$. Tyto tři další trojúhelníky jsou vytvořeny posunutím kopií trojúhelníku $\triangle ABC$ o vzdálenost $\frac{1}{8}AB$ podél strany $\triangle ABC$ ve směru od A k B , od B k C a od C k A . Vybarvený útvor na obrázku uvnitř všech čtyř trojúhelníků má obsah 300. Určete obsah trojúhelníku $\triangle ABC$.



Úloha 18

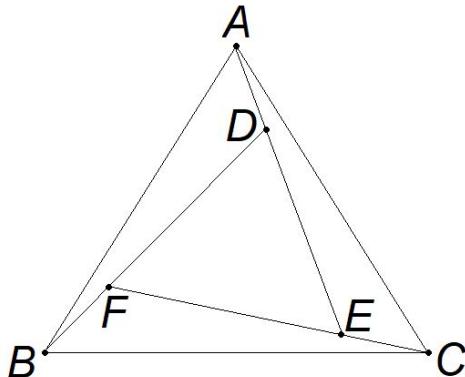
Krabice obsahuje pět červených koulí. V každém tahu je jedna z koulí náhodně vybrána, natřena na modro a navrácena zpět do krabice. Střední hodnota počtu tahů, než všech pět koulí přebarvíme na modro, je $\frac{m}{n}$, kde m a n jsou navzájem nesoudělná přirozená čísla. Určete $m+n$.

Úloha 19

Najděte zbytek čísla $\prod_{n=3}^{33} |2n^4 - 25n^3 + 33n^2|$ po dělení číslem 2019.

Úloha 20

Body D , E a F na obrázku níže leží uvnitř rovnostranného trojúhelníku $\triangle ABC$ tak, že D leží na úsečce AE , E leží na úsečce CF a F leží na úsečce BD . Trojúhelníky $\triangle AEC$, $\triangle BDA$ a $\triangle CFB$ jsou shodné. Je-li $|AB| = 10$ a $|DE| = 6$, obvod $\triangle BDA$ je $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$, kde a , b , c a d jsou přirozená, b a d jsou navzájem nesoudělná a c není dělitelné druhou mocninou žádného prvočísla. Určete $a + b + c + d$.



Úloha 21

Každá ze 48 stěn osmi krychlí o rozměrech $1 \times 1 \times 1$ je náhodně natřena buď modrou, nebo zelenou barvou. Pravděpodobnost, že těchto osm krychlí může být sestaveno do krychle o rozměrech $2 \times 2 \times 2$ tak, že její povrch je celý zelený, může být vyjádřen ve tvaru $\frac{p^m}{q^n}$, kde p a q jsou prvočísla a m a n jsou přirozená čísla. Určete $p + q + m + n$.

Úloha 22

Nechť a a b jsou kladná reálná čísla taková, že $(65a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 8ab + 65b^2) = (8a^2 + 39ab + 7b^2)^2$. Pak jedna z možných hodnot výrazu $\frac{a}{b}$ splňuje $2\left(\frac{a}{b}\right) = m + \sqrt{n}$, kde m a n jsou přirozená čísla. Určete $m + n$.

Úloha 23

Určete počet uspořádaných dvojic celých čísel (x, y) takových, že

$$\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} = 3 \left(2 + \frac{1}{xy}\right).$$

Úloha 24

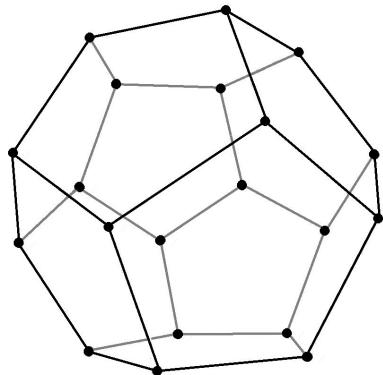
Dvanáctiúhelník je vepsán do kruhu o poloměru r . Tento dvanáctiúhelník má šest stran délky $6\sqrt{3}$, které se střídají se šesti stranami délky 2. Určete r^2 .

Úloha 25

Písmena AAABBCC uspořádáme v náhodném pořadí. Pravděpodobnost, že žádná dvě sousední písmena nejsou stejná je $\frac{m}{n}$, kde m a n jsou navzájem nesoudělná přirozená čísla. Určete $m + n$.

Úloha 26

Budě D pravidelný dvanáctistěn, což je mnohostěn s 20 vrcholy, 30 hranami a 12 stěnami tvaru pravidelných pětiúhelníků. Čtyřsten je mnohostěn se 4 vrcholy, 6 hranami a 4 trojúhelníkovými stěnami. Určete počet čtyřstěnů s kladným objemem, jejichž vrcholy jsou vrcholy D .



Úloha 27

Binhao má spravedlivou minci. Napíše číslo +1 na tabuli. Pak si hodí mincí. Pokud mu padne panna (**P**), napíše $+\frac{1}{2}$, jinak, padne-li mu orel (**O**), napíše $-\frac{1}{2}$. Pak si hodí mincí znovu. Pokud mu padne panna, napíše $+\frac{1}{4}$, jinak napíše $-\frac{1}{4}$. Binhao pokračuje v házení mincí a v n -té hodě, pokud hodí pannu, napíše $+\frac{1}{2^n}$, jinak napíše $-\frac{1}{2^n}$. Například pokud hodí **PPOPOPO**, napíše $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128}$. Pravděpodobnost, že Binhao vytvoří řadu, jejíž součet je větší než $\frac{1}{7}$ je $\frac{p}{q}$, kde p a q jsou navzájem nesoudělná přirozená čísla. Určete $p + 10q$.

Úloha 28

Čísla m a n splňují, že $m^2 - n = 32$ a $\sqrt[5]{m + \sqrt{n}} + \sqrt[5]{m - \sqrt{n}}$ je reálným kořenem polynomu $x^5 - 10x^3 + 20x - 40$. Určete $m + n$.

Úloha 29

Rotační kužel má vrchol A , střed podstavy B a $|AB| = 4$. Bod C leží na kružnici podstavy kuželet a $|BC| = 1$. Uvažme lichoběžník $ABCD$, kde $AB \parallel CD$. Rotační válec, jehož povrch obsahuje body A , C a D protíná kužel tak, že osa souměrnosti válce je kolmá k rovině lichoběžníka a CD je průměr válce. Koule o poloměru r leží uvnitř kuželet a uvnitř válce. Největší možná hodnota r je $\frac{a\sqrt{b}-c}{d}$, kde a , b , c a d jsou přirozená čísla, a a d jsou navzájem nesoudělná a b není dělitelné druhou mocninou žádného prvočísla. Určete $a + b + c + d$.

Úloha 30

Přestěhováním písmen ABCDEF nazveme permutaci těchto písmen takovou, že žádné z písmen není na své původní pozici, například BDECFA. *Obratem* v permutaci nazveme dvojici písmen xy takovou, že x je před y v původním uspořádání písmen, ale y je před x v této permutaci. Například, přestěhování BDECFA má sedm obratů: AB, AC, AD, AE, AF, CD a CE. Určete celkový počet všech obratů ve všech přestěhováních písmen ABCDEF.